Διαδικασίες Διακλάδωσης (δ.δ.)

Οι διαδ. διακλάδωσης μοντελοποιούν κάποιο πληθυσμό όπου κάθε άτομο στη γενιά n παράγει τυχαίο αριθμό απογόνων. Οι απόγονοι ανήκουν στην γενιά $n+1$ κ' αυτοί παράγουν τυχαίο αριθμό απογόνων. Η κατανομή του αριθμού των απογόνων είναι η ίδια για κάθε άτομο. Οι δ.δ. χρησιμοποιούνται για μοντέλα αναπαραγωγής. Για παράδειγμα τα άτομα μπορεί να αντιστοιχούν σε βακτήρια που γεννούν με κάποια πιθανότητα 0, 1 ή 2 απογόνους. Άλλα συστήματα με την ίδια δυναμική είναι η εξάπλωση των επιθέτων στην γενεαλογία ή η εξάπλωση των νετρονίων σε ένα πυρηνικό αντιδραστήρα.

Ορσ Η διαδικασία $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ είναι δ.δ. εαν

$$Z_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Z_i^{(n)}, & n\geq 1 \end{cases} \quad \text{όπου } Z_i^{(n)} \overset{iid}{\sim} Z \sim f(\cdot).$$

Οι ανεξάρτητες κ' ταυτοτικά κατανεμημένες τμ $Z_i^{(n)} \sim Z$ έχουν χώρο καταστάσεων κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{N}_0$.

Πρόταση Η διαδικασία διακλ. $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ είναι μια χρονικά ομογενής Markovian αλυσίδα.

$$P\{Z_n=y \mid Z_{n-1}=x, Z_{n-2}=x_{n-2}, \dots, Z_0=1\} = P\{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Z_i^{(n)}=y \mid Z_{n-1}=x, \dots\}$$

$$= P\{\sum_{i=1}^{x} Z_i^{(n)}=y \mid Z_{n-1}=x, \dots, Z_0=1\} \overset{\text{ανεξ. } Z_i^{(n)}}{=} P\{\sum_{i=1}^{x} Z_i^{(n)}=y\}$$

<u>Παρατηρούμε ότι</u>: επειδή $Z_i^{(n)}$, $i\geq 1$, $n\geq 1$ είναι ανεξάρτητα

$$P\{\sum_{i=1}^{x} Z_i^{(n)}=y\} = P\{\sum_{i=1}^{x} Z_i^{(n-1)}=y\} = \dots = P\{\sum_{i=1}^{x} Z_i^{(1)}=y\}$$ έτσι

έχουμε ότι $P\{Z_n=y \mid Z_{n-1}=x, \dots, Z_0=1\} = \underbrace{P\{Z_n=y \mid Z_{n-1}=x\}}$

η πιθανότητα μετάβασης δεν εξαρτάται από το <u>n</u>

$$P\{Z_n=y \mid Z_{n-1}=x\} = p(y|x) = P\{\sum_{i=1}^{x} Z_i^{(1)}=y\} = f^{*x}(y)$$

η x-τάξης διακριτή συνέλιξη της $f(\cdot)$ στο y.

□

<u>Παρατήρηση</u> Εάν X, Y διακριτές τμ. η συνέλιξη τους είναι:

$$W = X+Y \Rightarrow P\{W=n\} = P\left(\bigcup_{i=0}^{n}\{X=i, Y=n-i\}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P\{X=i, Y=n-i\} \underset{\text{Εάν } X\perp Y}{=} \sum_{i=0}^{n} P\{X=i\}P\{Y=n-i\}.$$

<u>Πρόταση</u> Εαν $G_n(s) \equiv \Pi_{Z_n}(s)$ είναι η πιθανογεννήτρια συν/ση της Z_n τότε ισχύει η αναδρομική σχέση $G_n(s) = G_{n-1}(G(s))$ $n \geq 1$, $G_0(s) = s$

<u>όπου</u> $G(s) \equiv \Pi_{Z_i^{(n)}}(s) = \Pi_Z(s), \forall i, n.$ η πιθανογεννήτρια του αριθμού των απογόνων κάθε ατόμου.

$$G_n(s) = \mathbb{E}\left[s^{Z_n}\right] = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[s^{Z_n} \mid Z_{n-1}\right]\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Z_i^{(n)}} \mid Z_{n-1}=k\right] P\{Z_{n-1}=k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{k} Z_i^{(n)}} \mid Z_{n-1}=k\right]} P\{Z_{n-1}=k\}$$

$$\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^{k} Z_i^{(n)}}\right] = \mathbb{E}\left[s^{Z_1^{(n)}}\right] \cdots \mathbb{E}\left[s^{Z_k^{(n)}}\right] = G(s)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} G(s)^k P\{Z_{n-1}=k\} = \mathbb{E}\left\{G(s)^{Z_{n-1}}\right\} = G_{n-1}(G(s))$$

$$G_0(s) = \mathbb{E}\left[s^{Z_0}\right] = s^1 \cdot P\{Z_0=1\} = s \quad : (3.1)$$

<u>Παρατήρηση</u>

$$G_n(s) = G_{n-1}(\underbrace{G(s)}_{s'}) = G_{n-2}(G(s')) = G_{n-2}(G(G(s)))$$

$$= \ldots = G_0(\underbrace{G(G(\cdots G(s)\cdots))}_{n-\text{φορές}}) \overset{(3.1)}{=}$$

$$= \underbrace{G(G(\cdots G(s)\cdots))}_{n-\text{φορές}} \quad : (3.2)$$

Θέτουμε $\overset{\circ n}{G} = \underbrace{G \circ G \circ \cdots \circ G}_{n\text{-φορές}}$ τότε

$$(3.2) \Rightarrow \boxed{G_n(s) = \overset{\circ n}{G}(s)} \quad : (4.1) \quad n \geq 0 \quad \underline{\text{όπου}} \quad \overset{\circ 0}{G}(s) = s$$

<u>Εφαρμογή</u> Να βρεθεί το $G_n(s)$ εάν $Z \sim \underbrace{\text{Bernoulli}(p)}_{Bin(1,p)}$

$$G_1(s) = \Pi_{Z_1}(s) \underset{Z_1 = \sum_{i=1}^{Z_0} Z_i^{(0)} = Z_1^{(0)} \sim Z}{=} \Pi_Z(s) = G(s)$$

(κάτι που ήδη γνωρίζουμε από την (4.1))

$$G_1(s) = s^0 q + s^1 p = q + sp = G(s)$$

$$G_2(s) = \overset{\circ 2}{G}(s) = G(q+sp) = q + (q+sp)p = q + pq + sp^2$$

$$G_3(s) = \overset{\circ 3}{G}(s) = G(q+pq+sp^2) = q + pq + p^2 q + p^3 s$$

$\vdots$

$$G_n(s) = \overset{\circ n}{G}(s) = q + pq + \cdots + p^{n-1} q + p^n s = \frac{q(1-p^n)}{1-p} + p^n s$$

$$= 1 - p^n + p^n s = 1 + (s-1)p^n \quad : (4.1)$$

<u>Παρατήρηση</u>:

$$G_n(s) = 1 + (s-1)p^n \Rightarrow \mathbb{E}[Z_n] = G_n'(1) = p^n$$

ενώ $p = \mathbb{E}[Z]$ δηλ. εδώ έχουμε ότι $\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z]^n$.

Θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει για κάθε $Z \sim f(\cdot)$

<u>Πρόταση</u> Εάν $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ = δ.δ κ' $\mu=\mathbb{E}[Z]$, $\sigma^2=Var[Z]$

(i) $\mathbb{E}[Z_n]=\mu^n$: (5.1)

(ii) $$Var[Z_n]=\begin{cases} n\cdot\sigma^2, & \mu=1 \\ \sigma^2\mu^{n-1}\left(\dfrac{1-\mu^n}{1-\mu}\right), & \mu\neq 1\end{cases} \quad : (5.2)$$

$$\mathbb{E}[Z_n]=\mathbb{E}\{\mathbb{E}[Z_n|Z_{n-1}]\}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}[Z_n|Z_{n-1}=k]\,P\{Z_{n-1}=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{Z_{n-1}}z_i^{(n)}\Big|Z_{n-1}=k\Big]P\{Z_{n-1}=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\Big[\sum_{i=0}^{k}z_i^{(n)}\Big]P\{Z_{n-1}=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\mathbb{E}[Z]P\{Z_{n-1}=k\}=\mathbb{E}[Z]\cdot\sum_{k=0}^{\infty}k\,P\{Z_{n-1}=k\}=\mu\cdot\mathbb{E}[Z_{n-1}]$$

$$\mathbb{E}[Z_n]=\mu\,\mathbb{E}[Z_{n-1}]=\mu^2\mathbb{E}[Z_{n-2}]=\dots=\mu^n\overbrace{\mathbb{E}[Z_0]}^{1}=\mu^n$$

$$Var[Z_n]=\mathbb{E}\{Var[Z_n|Z_{n-1}]\}+Var\{\mathbb{E}[Z_n|Z_{n-1}]\} \quad : (5.3)$$

$$Var[Z_n|Z_{n-1}]=Var\Big[\sum_{i=1}^{Z_{n-1}}z_i^{(n)}\Big|Z_{n-1}\Big]\underset{z_i^{(n)}\overset{iid}{\sim}Z}{=}Z_{n-1}\cdot Var[Z]$$

$$\mathbb{E}[Z_n|Z_{n-1}]=\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{Z_{n-1}}z_i^{(n)}\Big|Z_{n-1}\Big]=Z_{n-1}\cdot\mathbb{E}[Z]$$

$$(5.3)\Rightarrow Var[Z_n]=\mathbb{E}\{Z_{n-1}\cdot Var[Z]\}+Var\{Z_{n-1}\cdot\mathbb{E}[Z]\}=$$

$$=Var[Z]\,\mathbb{E}[Z_{n-1}]+Var[Z_{n-1}]\,\mathbb{E}[Z]^2\Rightarrow$$

$$Var[Z_n] = \sigma^2\mu^{n-1} + \mu^2 Var[Z_{n-1}] \quad , \; n \geq 1$$

$$= \sigma^2\mu^{n-1} + \mu^2\left(\sigma^2\mu^{n-2} + \mu^2 Var[Z_{n-2}]\right) = \sigma^2\mu^{n-1} + \sigma^2\mu^{n} + \mu^4 Var[Z_{n-2}]$$

$$= \sigma^2\mu^{n-1} + \sigma^2\mu^{n} + \mu^4\left(\sigma^2\mu^{n-3} + \mu^2 Var[Z_{n-3}]\right)$$

$$= \sigma^2\mu^{n-1} + \sigma^2\mu^{n} + \sigma^2\mu^{n+1} + \mu^6 Var[Z_{n-3}] = \sigma^2\mu^{n-1}(1+\mu+\mu^2) + \mu^6 Var[Z_{n-3}]$$

$$\vdots$$

$$= \sigma^2\mu^{n-1}(1+\mu+\dots+\mu^{n-1}) + \mu^{2n}\underbrace{Var[Z_0]}_{0}$$

$$= \begin{cases} n\sigma^2 & \mu = 1 \\ \sigma^2\mu^{n-1}\cdot\dfrac{1-\mu^n}{1-\mu} & \mu \neq 1 \end{cases}$$

□

Ορσ Η πιθανότητα αφανισμού (ultimate extinction prob.) είναι $\gamma = P(UE) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}\{Z_n = 0\}\right)$

Πρόταση Θα δείξουμε ότι $\gamma = \lim_{n\to\infty} \overbrace{P\{Z_n = 0\}}^{\gamma_n}$

Εστω ακολουθία ενδεχομένων $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \geq 0 \Rightarrow$

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = P\left(A_0 \cup \bigcup_{n=0}^{\infty}(A_{n+1}\setminus A_n)\right) = P(A_0) + \sum_{n=0}^{\infty} P(A_{n+1}\setminus A_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[P(A_0) + \sum_{k=0}^{n} P(A_{k+1}\setminus A_k)\right] = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Θέτοντας $A_n = \{Z_n = 0\}$ έχουμε ότι $\gamma = \lim_{n\to\infty} P\{Z_n = 0\}$ $\square$

<u>Πρόταση</u> Η πιθανότητα αφανισμού γ είναι η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης: $\{ s = G(s) \quad , \quad 0 \le s \le 1 \} : (7.1)$

Το $G_n(s)$ είναι πιθανογεννήτρια συν/ση της τ.μ. Z_n

δηλ. $G_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P\{Z_n = k\} \Rightarrow$

$$G_n(0) = P\{Z_n = 0\} = \gamma_n$$

$$G_{n-1}(0) = P\{Z_{n-1} = 0\} = \gamma_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$G_1(0) = P\{Z_1 = 0\} = \gamma_1$$

$$G_0(0) = P\{Z_0 = 0\} = \gamma_0 = 0$$

$$G_n(s) = G^{on}(s)$$

$$\Updownarrow$$

<u>Γνωρίζουμε ότι</u> $G_n(s) = G(G_{n-1}(s)) \xRightarrow{(s=0)}$
$\underset{n\ge1}{}$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_n = G(\gamma_{n-1})} : (7.2) \xRightarrow{\lim_{n\to\infty}(\cdot)} \gamma = G(\gamma)$$

<u>δηλ</u> το γ ικανοποιεί την εξίσωση (7.1)

$$G'(s) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} s^k P\{Z = k\} \right\}' = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot s^{k-1} P\{Z = k\} \ge 0, \quad \forall\, 0 \le s \le 1$$

$$\Rightarrow G(s) \nearrow, \ \forall\, 0 \le s \le 1$$

Έστω ότι s^* είναι ρίζα της (7.1), τότε $s^* \ge 0 = \gamma_0 \Rightarrow$

$$\xRightarrow{G(\cdot)} G(s^*) \ge G(0) \underset{(7.2)}{\Leftrightarrow} s^* \ge \gamma_1$$

$$s^* \geq \gamma_1 \overset{G(\cdot)}{\Rightarrow} G(s^*) \geq G(\gamma_1) \overset{(7.2)}{\Leftrightarrow} s^* \geq \gamma_2$$

Επαγωγικά λοιπόν έχουμε ότι $s^* \geq \gamma_n \; , \forall \; n \geq 0 \overset{\lim_{n\to\infty}(\cdot)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow s^* \geq \gamma$ για κάθε ρίζα s^* της (7.1) $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \inf\{ s : 0 \leq s \leq 1, \; s = G(s)\}}$$

Παρατήρηση: Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης (7.1) είναι μη κενό εφόσον $G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P\{Z=k\} \Big|_{s=1} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{Z=k\} = 1$

Παράδειγμα (i) Δίνεται διαδικασία διακλάδωσης $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ με κατανομή απογόνων $Z \sim Bin(N, p)$. Να βρεθεί η εξίσωση που ικανοποιεί το extinction probab. γ. Να βρεθεί το γ για $N=2$, κ' $p = 1/4$

$$G(s) = \mathbb{E}[s^Z] = \sum_{k=0}^{N} s^k Bin(k|N, p) = \sum_{k=0}^{N} s^k \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$= (sp+1-p)^N.$$

Έτσι το γ είναι η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης $\{ s = (sp+1-p)^N, \; 0 \leq s \leq 1\}$

$$N=2, \; p = 1/4 \Rightarrow s = \left(\frac{s}{4} + \frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow (s-1)(s-9) = 0, \; 0 \leq s \leq 1$$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = 1}$ Δηλ. Η εξαφάνιση του είδους είναι σίγουρη όταν $Z \sim Bin(2, 1/4)$ □

(ii) Να βρεθεί το γ όταν $Z \sim Geo(p)$ όπου

$Z = \#$ των αποτυχιών έως την $1^{η}$ επιτυχίας : (9.1)

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k Geo(k|p) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot p(1-p)^k = \frac{p}{1 - s(1-p)} \quad : (9.2)$$

$$s = G(s) \Leftrightarrow s = \frac{p}{1-s(1-p)} \Leftrightarrow (1-p)s^2 - s + p = 0$$

$$\Leftrightarrow s_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2(1-p)} = \frac{1 \pm |2p-1|}{2(1-p)}$$

$$\left.\begin{array}{l} p < 1/2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} s_+ = 1 \\ s_- = \dfrac{p}{1-p} < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma = \dfrac{p}{1-p} \\[2em] p \geq 1/2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} s_+ = \dfrac{p}{1-p} > 1 \\ s_- = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = \begin{cases} \dfrac{p}{1-p}, & p < 1/2 \\ 1 & p \geq 1/2 \end{cases}$$

$\square$

Πρόταση Εαν $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ είναι δ.δ. με κατανομή απογόνων $Z \sim P\{Z=\cdot\}$ κ' $G(s)=\Pi_Z(s)$ κ' ισχύουν τα παρακάτω

(α) $G(s)\nearrow$, κ' $G(s)$ είναι αυστηρώς κυρτή $0<s<1$

(β) $G(0)=P\{Z=0\}\geq 0$

(γ) $G(1)=1$

(δ) $G'(1)=E[Z]=\mu$

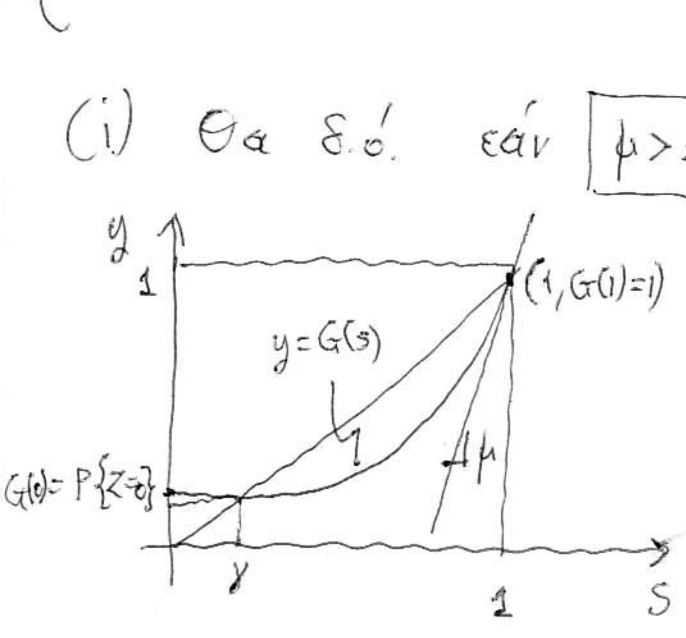
(ε) $\gamma = \inf\{s: 0\leq s\leq 1,\ s=G(s)\}$

Τα (β)-(ε) είναι προφανή. Για το (α) έχουμε

$G(s)=\sum_{k=0}^{\infty} s^k P\{Z=k\}$, $G(s)\nearrow \Leftrightarrow G'(s)=\sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} P\{Z=k\}>0$
$\Leftrightarrow P\{Z\geq 1\}>0$

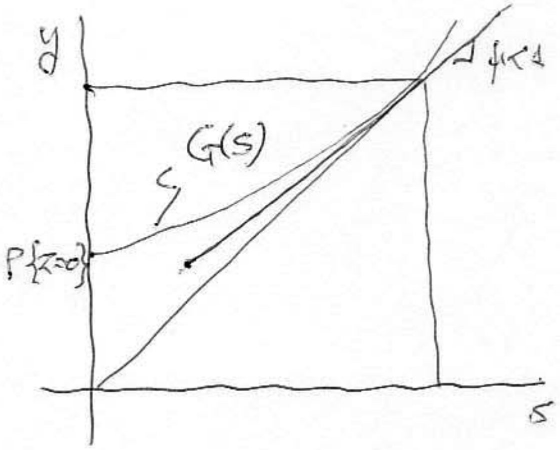
$G(s)$ αυστηρώς κυρτή $\Leftrightarrow G''(s)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}P\{Z=k\}>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P\{Z\geq 2\}>0$

(i) Θα δ.ό. εάν $\boxed{\mu>1 \Rightarrow \gamma<1}$



$\mu>1 \Rightarrow$ Το γραφικό της $G(s)$ βρίσκεται κάτω από την $y=s$ στα αριστερά του $(1,1)$. Αλλά $y=G(s)$ πρέπει να τμήσει τον y-άξονα στο $G(0) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Υπάρχει μοναδικό $0<\gamma<1$ τ.ώ. $\gamma=G(\gamma)$

(ii) Εαν $\boxed{\mu \le 1 \Rightarrow \gamma = 1}$



$\mu < 1 \Rightarrow$ το γραφικό της $G(s)$ βρίσκεται πάνω από της $y = s$ κ' η μοναδική λύση της $s = G(s)$ στο $0 \le s \le 1$ είναι $s = \gamma = 1$

<u>Ειδικές περιπτώσεις</u> όπου δεν ισχύει ότι $G(s)$ είναι αυστηρά κυρτή $\Leftrightarrow P\{Z \ge 2\} = 0 \Leftrightarrow P\{Z \le 1\} = 1$. Έστω ότι $p = P\{Z=1\}$ κ' $1-p = P\{Z=0\}$ <u>τότε</u> $G(s) = 1 - p + ps$

τοτε $G(s) = s \Leftrightarrow \boxed{1 - p + ps = s} \Rightarrow s = 1,\ 0 \le p < 1,\ \mu = p$

$\Rightarrow \gamma = 1,\ 0 \le \mu = p < 1.$

Στην περίπτωση που $p = 1 \Rightarrow 1 - p + ps = s \Leftrightarrow s = s \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η $G(s) = s$ έχει ∞ λύσεις στο $0 \le s \le 1$ κ' η μικρότερη είναι η $s = \gamma = 0$, $\mu = p = 1$

Εαν $p = 0 \Rightarrow s = \gamma = 1,\ \mu = 0$

$\square$

Ο Χρόνος έως την τελική εξαφάνιση

Ορίζουμε το ενδεχόμενο $\{T=n\} = \{Z_{n-1}>0, Z_n=0\} =$
= η γενιά $\underline{n}$ είναι η πρώτη γενιά με μηδενικό αριθμό απογόνων

$$\left.\begin{array}{l} P\{Z_n=0\} = P\{Z_n=0, Z_{n-1}>0\} + P\{Z_n=0, Z_{n-1}=0\} \\ \{Z_{n-1}=0\} \subset \{Z_n=0\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$P\{Z_n=0\} = P\{T=n\} + P\{Z_{n-1}=0\} \Leftrightarrow$$

$$P\{T=n\} = \underbrace{P\{Z_n=0\}}_{G_n(0)=\gamma_n} - \underbrace{P\{Z_{n-1}=0\}}_{G_{n-1}(0)=\gamma_{n-1}}$$

<u>Παραδ.</u> $Z \sim \text{Bernoulli}(p) \overset{(9.1)}{\Longrightarrow} G_n(s) = 1+(s-1)p^n \Rightarrow$

$\Rightarrow G_n(0) = 1-p^n = \gamma_n \Rightarrow P\{T=n\} = p^{n-1}(1-p) \overset{(9.1)}{\Longrightarrow}$

$T \sim \text{Geo}(1-p)+1$ = # των δοκιμών έως την 1^{η} επιτυχία με $P(E)=1-p$

$$E[T] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p^{n-1}(1-p) = (1-p)\cdot\left(\frac{1}{1-p}\right)' = \frac{1}{1-p}.$$

<u>Παραδ</u> Έστω $Z \sim \text{Geo}(p)$, $\text{Geo}(k|p) = p(1-p)^k$, $k \geq 0$
κ' $p = 1/2$ βρείτε την $P\{T=n\}$

$$(9.2) \Rightarrow G_1(s) = G(s) = \frac{1}{2-s}$$

$$G_2(s) = G(G(s)) = \frac{2-s}{3-2s}$$

$$G_3(s) = G(G_2(s)) = \frac{3-2s}{4-3s}$$

Δείχνουμε ότι $G_n(s) = \dfrac{n-(n-1)s}{(n+1)-ns}$ με επαγωγή:

$$G_{n+1}(s) = G(G_n(s)) = \frac{1}{2 - \dfrac{n-(n-1)s}{(n+1)-ns}} = \frac{(n+1)-ns}{(n+2)-(n+1)s}$$

Έτσι: $P\{T=n\} = G_n(0) - G_{n-1}(0) = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $\square$

Παρατήρηση (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ διότι εαν $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$ μπορούμε να δείξουμε επαγωγικά ότι $S_N = 1 - \dfrac{1}{N+1}$

Έτσι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$

(ii) $\displaystyle \mathbb{E}[T] = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$